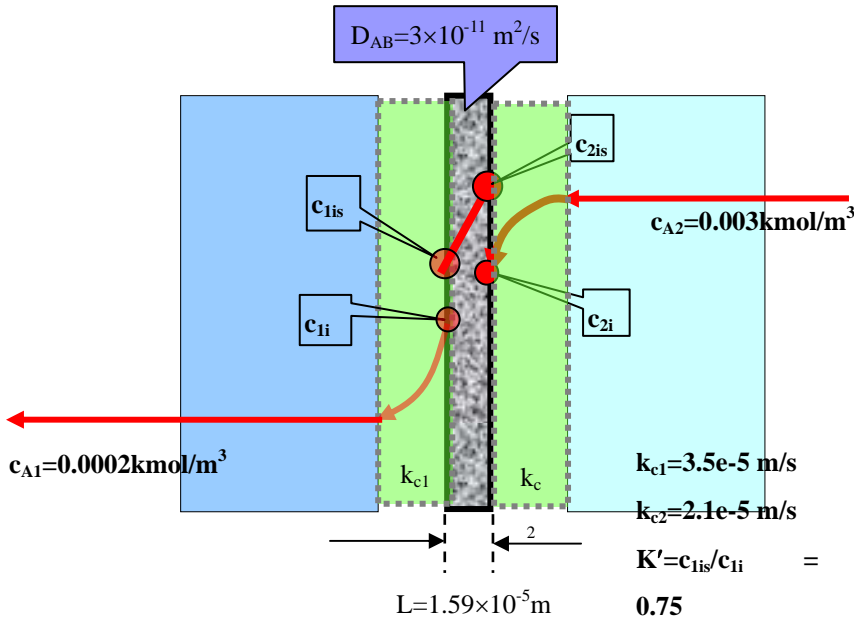


13.2-1. 막과 액상을 통한 확산



a) 각각의 저항, 총저항, 그리고 두 막의 총 % 저항은?

교재 828쪽으로부터 위 막분리공정에 대한 물질전달 flux 는 다음과 같다.

$$N_A = \frac{1}{(1/k_{c1} + 1/\pi_M + 1/k_{c2})} (c_{A1} - c_{A2}) \quad (1)$$

여기에서 투과도  $\pi_M$  은 다음과 같이 정의되며, 계산된다.

$$\pi_M = \frac{K'D_{AB}}{L} = 0.75 \cdot \frac{3 \times 10^{-11} m^2}{s} \cdot \frac{1}{1.59 \times 10^{-5} m} = 1.415 \times 10^{-6} m/s$$

식 (1) 에서 막의 주변에 걸리는 저항은 3개로서 물질전달계수의 역수로 계산된다. 왼쪽 액상에 걸리는 저항을  $R_1$ , 막에 걸리는 저항을  $R_M$ , 그리고 오른쪽 액상에 걸리는 저항을  $R_2$  라고 하면, 각각의 저항은 다음과 같다.

$$R_1 = \frac{1}{k_{c1}} = 2.86 \times 10^4 s/m$$

$$R_M = \frac{1}{\pi_M} = 7.07 \times 10^5 s/m$$

$$R_2 = \frac{1}{k_{c2}} = 4.76 \times 10^4 s/m$$

총저항은  $R = R_1 + R_M + R_2 = 78.32 \times 10^4 s/m$  이다.

전체저항 중에 막의 오른쪽과 왼쪽 액상에서 걸리는 저항의 비율은

$$\frac{R_1 + R_2}{R} \times 100 = 9.73\%$$

즉, 막주변의 액상에서 대류에 의한 저항은 10% 정도 뿐이고, 대부분의 저항은 막을 통과하면서 생기는 확산저항으로부터 기인한다.

b) 정상상태에서의 물 flux 와 0.01 kmol/h 가 전달되기 위해 필요한 막면적은?

물 flux 는 식 (1) 로부터 구한다.

$$N_A = \frac{1}{(1/k_{c1} + 1/\pi_M + 1/k_{c2})} (c_{A1} - c_{A2})$$

$$= \frac{1}{78.32 \times 10^4} \cdot \frac{m}{s} \cdot (0.003 - 0.0002) \frac{kmol}{m^3} = 3.575 \times 10^{-9} \frac{kmol}{m^2 s} = 1.287 \times 10^{-5} \frac{kmol}{m^2 hr}$$

필요한 막면적은

$$q = N_A \cdot A_m$$

$$A_m = \frac{q}{N_A} = \frac{0.01 kmol}{hr} \cdot \frac{m^2 hr}{1.287 \times 10^{-5} kmol} = 777.0 m^2$$

c) 유속 (v) 이 증가함에 따라 대류전달계수가  $v^{0.6}$  으로 증가한다면, 유속이 2배로 증가했을 때, 물질전달 flux 는 몇 % 증가하는가?

물질전달계수는 유속의 0.6 제곱에 비례하므로 다음과 같은 비례식이 성립한다.

$$k_{c1} = av^{0.6} \tag{2}$$

여기에서 a 는 비례상수이다. 유속이 2배로 증가하면,

$$v_{new} = 2v \tag{3}$$

이므로 식(3)을 식(2) 에 대입하면,

$$k_{c1,new} = 1.516av_1^{0.6} = 1.516k_{c1} = 5.305 \times 10^{-5} m/s$$

마찬가지로, 막의 오른쪽 액상에도 유속이 2배로 증가했다고 하면,

$$k_{c2,new} = 1.516av_2^{0.6} = 1.516k_{c2} = 3.183 \times 10^{-5} m/s$$

따라서 새로운 전체저항  $R_{new}$  는 다음과 같다.

$$R_{new} = \frac{1}{k_{c1,new}} + \frac{1}{\pi_M} + \frac{1}{k_{c2,new}} = 75.70 \times 10^4 s/m$$

따라서 전에보다 감소한 저항 % 는

$$\frac{R - R_{new}}{R} = \frac{78.32 - 75.70}{78.32} \times 100 = 3.35\%$$

이고, 새로운 유속에서의 물 flux 는 다음과 같다.

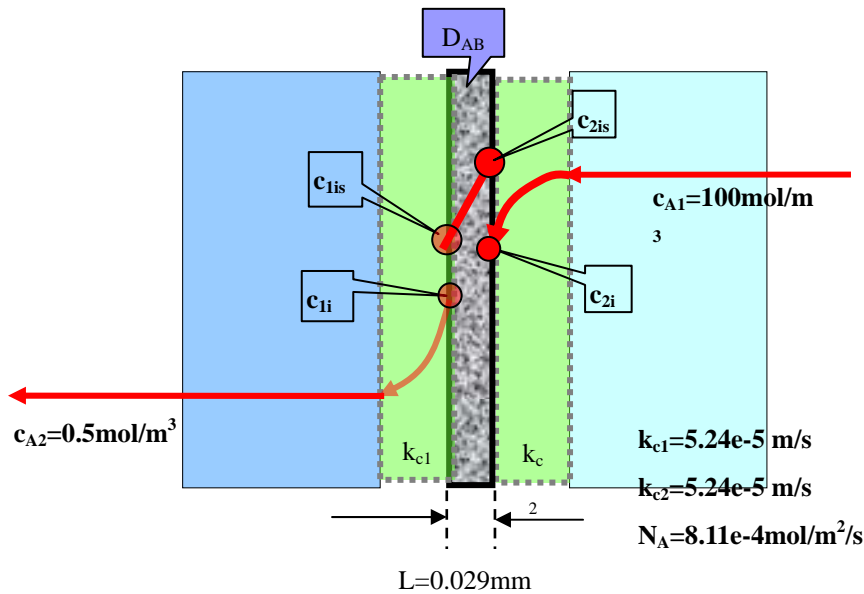
$$N_{A,new} = \frac{1}{75.7 \times 10^4} \cdot \frac{m}{s} \cdot (0.003 - 0.0002) \frac{kmol}{m^3} = 3.699 \times 10^{-9} \frac{kmol}{m^2 s} = 1.332 \times 10^{-5} \frac{kmol}{m^2 hr}$$

따라서 전보다 증가한 물 flux 는

$$\frac{N_{A,new} - N_A}{N_A} = \frac{1.332 - 1.287}{1.287} \times 100 = 3.5\%$$

즉, 막 양쪽의 액상유속을 2배로 증가시킴으로서 증가한 물플럭스는 3.5 % 이고, 물질전달량의 증가가 크지 않음을 확인할 수 있다.

13.2-2. 혈액투석에 대한 막의 적합성



a) 투과도  $\pi_M$  와  $D_{AB} \cdot K'$  을 구하시오.

$$N_A = \frac{1}{(1/k_{c1} + 1/\pi_M + 1/k_{c2})} (c_{A1} - c_{A2})$$

$$\frac{1}{\pi_M} = \frac{(c_{A1} - c_{A2})}{N_A} - \left( \frac{1}{k_{c1}} + \frac{1}{k_{c2}} \right)$$

$$\pi_M = \frac{1}{\frac{(c_{A1} - c_{A2})}{N_A} - \left( \frac{1}{k_{c1}} + \frac{1}{k_{c2}} \right)} = \frac{1}{\frac{(100 - 0.5) \text{ mol/m}^3}{8.11 \times 10^{-4} \frac{\text{mol}}{\text{m}^2 \text{s}} - \frac{2}{5.24 \times 10^{-5} \frac{\text{s}}{\text{m}}}}} = 1.1831 \times 10^{-5} \text{ m/s}$$

여기에서 투과도  $\pi_M$  은 다음과 같이 정의되므로,

$$\pi_M = \frac{K' D_{AB}}{L}$$

$$K' \cdot D_{AB} = L \cdot \pi_M = 0.029 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot 1.1831 \times 10^{-5} \text{ m/s} = 3.431 \times 10^{-10} \text{ m}^2 / \text{s}$$

b) 전체저항에 대한 막저항 % 는?

전체저항은 다음과 같다.

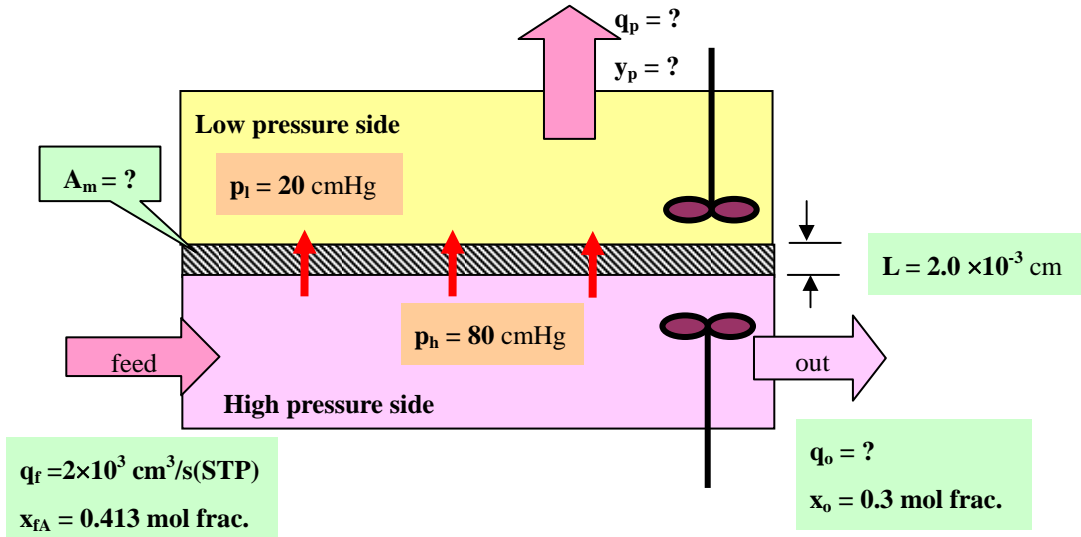
$$R = R_1 + R_M + R_2 = \left( \frac{1}{k_{c1}} + \frac{1}{\pi_M} + \frac{1}{k_{c2}} \right) = \left( \frac{2}{5.24 \times 10^{-5}} + \frac{1}{1.1831 \times 10^{-5}} \right) \frac{\text{s}}{\text{m}} = 1.227 \times 10^5 \text{ s/m}$$

막저항의 % 는 다음과 같다.

$$\frac{R_M}{R} \times 100 = 68.9\%$$

즉, 전체저항에 대하여 막저항이 70% 정도로서, 문제 13.2-1 에서 보다는 인공신장막 저항이 현저히 작음을 알 수 있다.

13.4-2. 막설계에 대한 완전혼합 모델의 사용 (기상)



여기에서, 다음과 같은 투과도와 두 성분간 투과비율을 알고 있다.

$$\pi_A = \frac{400 \times 10^{-10} \text{ cm}^3(\text{STP}) \cdot \text{cm}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{cmHg}}$$

$$\alpha^* = \frac{\pi_A}{\pi_B} = 10$$

a) 투과액의 조성  $y_p$  를 구하시오.

투과도에 따른 두기체 A 와 B 의 물질전달 flux 는 다음과 같다.

$$N_A = \frac{q_p y_p}{A_m} = \frac{\pi_A}{L} (p_h x_o - p_l y_p) \tag{0}$$

$$N_B = \frac{q_p (1 - y_p)}{A_m} = \frac{\pi_B}{L} (p_h (1 - x_o) - p_l (1 - y_p))$$

두식을 서로 나누면,

$$\frac{N_A}{N_B} = \frac{y_p}{(1 - y_p)} = \frac{\pi_A}{\pi_B} \frac{(p_h x_o - p_l y_p)}{(p_h (1 - x_o) - p_l (1 - y_p))} \tag{1}$$

식 (1) 은  $y_p$  에 대하여 비선형 2차방정식으로, 알려진 값을 대입하여, MS excel 도구>해 찾기 기능을 이용하면 쉽게 구할 수 있다. 비선형방정식은 식(1) 로부터,

$$f(y_p) = \frac{y_p}{(1 - y_p)} - \frac{\pi_A}{\pi_B} \frac{(p_h x_o - p_l y_p)}{(p_h (1 - x_o) - p_l (1 - y_p))} \tag{2}$$

이고, 초기값으로  $y_p = 0.5$  로 주면,  $f(y_p) = 0$  을 만족하는 값은  $y_p = 0.6781$  이다.

b) 공급액중 투과된 분율은?

투과된 분율 ( $\theta$ ) 는 다음과 같다.

$$\theta = \frac{q_p}{q_f} \quad (3)$$

이 분율을 구하기 위하여, 총괄물질수지식과 A 성분에 대한 성분물질수지식을 세운다.

$$\begin{aligned} q_f &= q_o + q_p \\ q_f \cdot x_f &= q_o \cdot x_o + q_p \cdot y_p \end{aligned} \quad (4)$$

식(4)로부터,  $\theta$  를 구하기 위하여, 양변을  $q_f$  로 나누고, 정리하면,

$$\begin{aligned} \frac{q_o}{q_f} &= 1 - \theta \\ x_f &= \frac{q_o}{q_f} \cdot x_o + \theta \cdot y_p \Rightarrow x_f = (1 - \theta) \cdot x_o + \theta \cdot y_p \end{aligned} \quad (5)$$

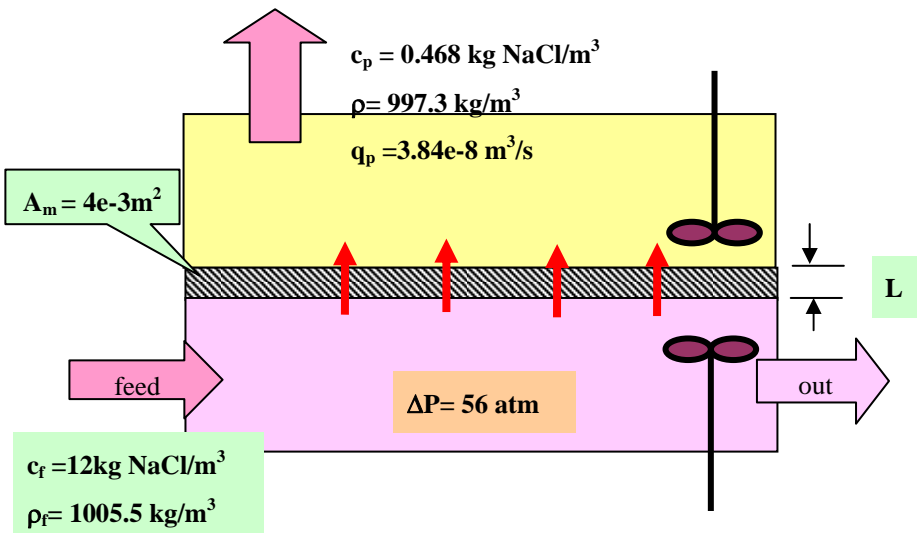
식(5)의 두번째 식으로부터,

$$\theta = \frac{x_f - x_o}{y_p - x_o} = \frac{0.413 - 0.3}{0.6781 - 0.3} = 0.299$$

막면적은 식(0)의 첫번째식으로부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{q_p y_p}{A_m} &= \frac{\pi_A}{L} (p_h x_o - p_l y_p) \\ A_m &= \frac{q_p y_p}{\frac{\pi_A}{L} (p_h x_o - p_l y_p)} = 1.9415 \times 10^6 \text{ cm}^2 = 194.15 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

13.9-2. 역삼투의 경우 투과상수의 결정 (액상)



이 역삼투압공정의 투과상수 ( $\pi_M : \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{atm}} \right]$ ) 에 대한 질량 flux 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$N_A = \pi_M (\Delta P - \Delta \pi) \quad (1)$$

또한 투과한 투과액의 물질전달량을 실험에 의하여 알고 있으므로, 소금에 대한 질량 flux 는

$$N_{salt} = \pi_s(\Delta P - \Delta\pi) = \frac{q_p c_p}{A_m} \quad (2)$$

이다. 물에 대한 질량 flux 는 소금이 매우 소량 들어 있으므로, 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$N_{water} = \pi_w(\Delta P - \Delta\pi) \cong \frac{q_p \rho_p}{A_m} \quad (3)$$

식 (2)-(3) 에서 우리가 모르는 값은 막을 사이에 둔 두 용액의 삼투압차 ( $\Delta\pi$ ) 이다. 소금의 삼투압은 2 가지 방법으로 구할 수 있는데, 첫번째는 교재 856 쪽의 표값을 이용하는 것이고, 두번째는 교재 856쪽 식 (13.9-1) 을 이용하는 것이다.

여기에서는 두번째 방법을 사용하기로 한다. 단 25 °C 순수한 물의 밀도는 997kg/m<sup>3</sup> 이다. 삼투압을 구하는 식은 다음과 같다.

$$\pi = \frac{n}{V_{water}} RT$$

여기에서  $V_{water}$  는 용매 물만의 부피를 의미한다. 물만의 부피는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$V_{water,f} = (1005.5 - 12)kg \cdot \frac{m^3}{997kg} = 0.9965m^3 \quad (4)$$

$$V_{water,p} = (997.3 - 0.468)kg \cdot \frac{m^3}{997kg} = 0.9999m^3 \quad (5)$$

소금물속에 녹아있는 소금은 이온화되며, 농도를 알고 있으므로, 식 (4)-(5) 의 물속에 들어있는 소금의 몰 수 는 다음과 같이 계산한다. 단 소금의 분자량은 58.44 g/mol 이다.

$$n_f = 2 \times 12kg \cdot \frac{1000mol}{58.44kg} = 410.68mol$$

$$n_p = 2 \times 0.468kg \cdot \frac{1000mol}{58.44kg} = 16.02mol$$

따라서 삼투압은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\pi_f = \frac{n_f}{V_{water,f}} RT = \frac{410.68mol}{996.5l} \cdot \frac{0.082atm \cdot l}{mol \cdot K} \cdot 298.15K = 10.08atm$$

$$\pi_p = \frac{n_p}{V_{water,p}} RT = \frac{16.02mol}{999.9l} \cdot \frac{0.082atm \cdot l}{mol \cdot K} \cdot 298.15K = 0.392atm$$

따라서 삼투압차는

$$\Delta\pi = \pi_f - \pi_p = (10.08 - 0.392)atm = 9.69atm \quad (6)$$

소금의 투과상수는 식 (2) 와 식 (6) 으로부터 구한다.

$$\pi_s = \frac{q_p c_p}{A_m \cdot (\Delta P - \Delta\pi)} = \frac{3.84 \times 10^{-8} \frac{m^3}{s} \cdot 0.468 \frac{kg}{m^3}}{4 \times 10^{-3} m^2 \cdot (56 - 9.69)atm} = 9.702 \times 10^{-8} \frac{kg}{m^2 \cdot s \cdot atm}$$

물의 투과상수는 식 (3) 과 식(6) 으로부터 구한다.

$$\pi_w = \frac{q_p \rho_p}{A_m \cdot (\Delta P - \Delta \pi)} = \frac{3.84 \times 10^{-8} \frac{m^3}{s} \cdot 997.3 \frac{kg}{m^3}}{4 \times 10^{-3} m^2 \cdot (56 - 9.69) atm} = 2.067 \times 10^{-4} \frac{kg}{m^2 \cdot s \cdot atm}$$

참고로, 역삼투압공정은 주로 물의 제거를 통한 용질의 농축에 있으므로, 물에 대한 투과상수를 주로 사용한다.

용질 배제율 (solute rejection ratio,  $R_s$ ) 은 유입용질의 농도에 대한 막을 투과하지 않은 용질의 농도비를 의미하므로,

$$R_s = \frac{c_f - c_p}{c_f} = \frac{12 - 0.468}{12} = 0.961$$

이다.

**13.11-1. 한외여과의 flux 계산**

유입액속의 어느 단백질의 질량분율  $x_f = 0.009$  이고, ultrafiltration 공정의 압력차는  $\Delta P = 5 \text{ psi}$  이다. 물에 대한 막투과도는  $\pi_M = 1.37 \times 10^{-2} \frac{kg}{m^2 \cdot s \cdot atm}$  이다. 용액내 물의 막전달 플럭스를 예측하시오.

**풀이:**

단백질의 질량분율이 매우 낮으므로, 삼투압도 매우 낮다고 가정하면, 물의 막전달 플럭스는

$$\begin{aligned} N_{water} &= \pi_w \cdot (\Delta P - \Delta \pi) \cong \pi_w \cdot \Delta P \\ &= 1.37 \times 10^{-2} \frac{kg}{m^2 \cdot s \cdot atm} \cdot 5 \text{ psi} \frac{1 atm}{14.7 \text{ psi}} = 0.00466 \frac{kg}{m^2 \cdot s} \end{aligned}$$

산업체에서 사용하는 단위로 환산하면, 다음과 같다. 단, 물의 밀도는 1 kg/l 로 한다. 단위환산은 부록 A1 929-930쪽 참조.

$$N_{water} = 0.00466 \frac{kg}{m^2 \cdot s} \cdot \frac{3600 \times 24 s}{1 day} \cdot \frac{1 m^2}{(3.28 \text{ ft})^2} \cdot \frac{1 l}{1 kg} \cdot \frac{1 gal}{3.7854 l} = 9.89 \frac{gal}{ft^2 \cdot day}$$